

চতুর্থ অধ্যায় জ্যামিতিক অঙ্কন

কম্পাস ও রুলার ব্যবহার করে নির্দিষ্ট দেওয়া শর্ত অনুযায়ী যে চিত্র অঙ্কন করা হয়, তাহাই জ্যামিতিক অঙ্কন। উপপাদ্য প্রমাণের জন্য যে চিত্র অঙ্কন করা হয় তা যথাযথ (*accurate*) হওয়া খুব জরুরী নয়। সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন যথাযথ হওয়া খুবই প্রয়োজন।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

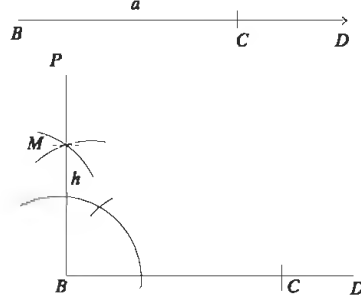
- প্রদত্ত তথ্য ও উপাস্তের ভিত্তিতে ত্রিভুজ অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- প্রদত্ত তথ্য ও উপাস্তের ভিত্তিতে বৃত্ত অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।

৪.১ ত্রিভুজ সংক্রান্ত কতিপয় সম্পাদ্য :

সম্পাদ্য ১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

মনেকরি, ত্রিভুজের ভূমি a , উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

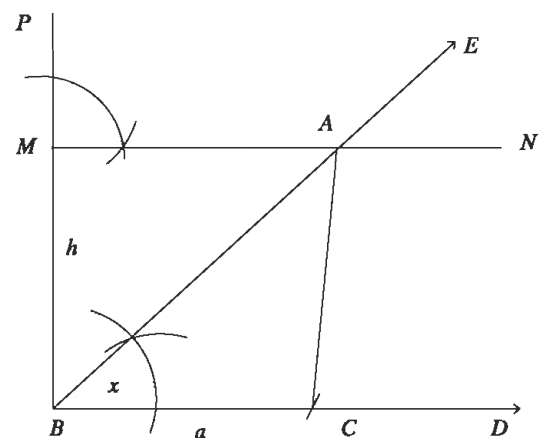
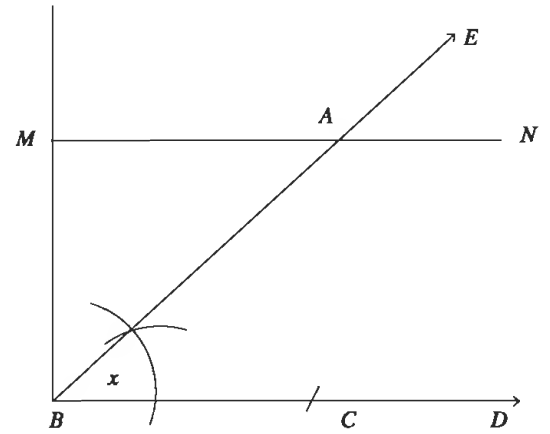
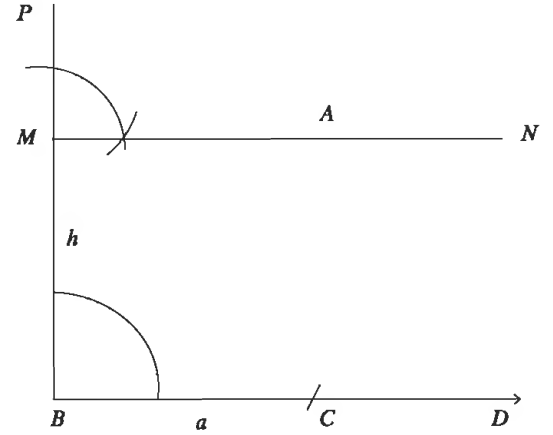


অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২ : B বিন্দুতে BC এর ওপর লম্ব BP অঙ্কন করি এবং BP থেকে $BM = h$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ৩ : M বিন্দুতে BC এর সমান্তরাল MN রেখাংশ অঙ্কন করি।



ধাপ ৪ : আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫ : A, C যোগ করি। তাহলে ABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $MN \parallel BC$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore ABC$ এর উচ্চতা $BM = h$

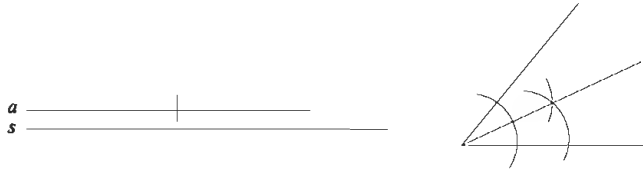
আবার, $BC = a$ এবং $\angle ABC = \angle x$

$\therefore \triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বিশ্লেষণ : যেহেতু ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দেয়া আছে, সুতরাং একটি সরলরেখা থেকে ভূমির সমান অংশ কেটে নিয়ে তার এক প্রান্তে প্রদত্ত কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে। অতঃপর ভূমির সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে আনত এমন রেখাঙ্ক বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন ভূমি থেকে এর উচ্চতা ত্রিভুজের উচ্চতার সমান হয়।

সম্পাদ্য ২

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a , অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

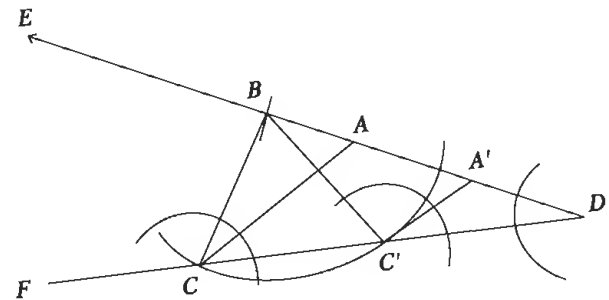
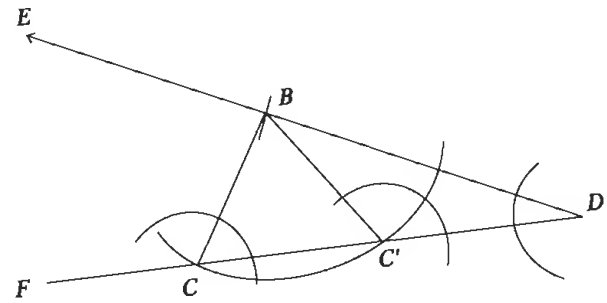
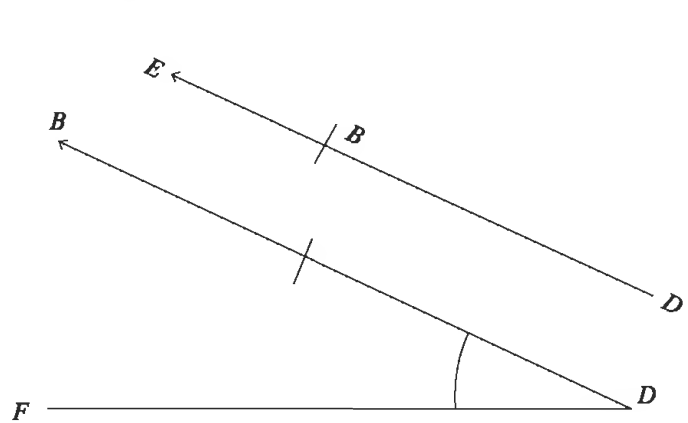
ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি DE থেকে $DB = s$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২ : DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2} \angle x$

অঙ্কন করি।

ধাপ ৩ : B কে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে। B, C ও B, C' যোগ করি।

ধাপ ৪ : C বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DCA$ এবং C' বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি। CA ও $C'A'$ রেখাংশ BD কে যথাক্রমে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও $A'BC'$ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



প্রমাণ : যেহেতু $\angle ACD = \angle ADC = \angle A'C'D = \frac{1}{2} \angle x$ (অঙ্কনানুসারে)

$$\therefore \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{1}{2} \angle x + \frac{1}{2} \angle x = \angle x$$

$$\angle BA'C' = \angle A'DC' + \angle A'C'D = \frac{1}{2} \angle x + \frac{1}{2} \angle x = \angle x$$

এবং $AC = AD, A'C' = A'D$

ABC ত্রিভুজে $\angle BAC = \angle x, BC = a$ এবং $CA + AB = DA + AB = DB = s$

$\therefore \triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

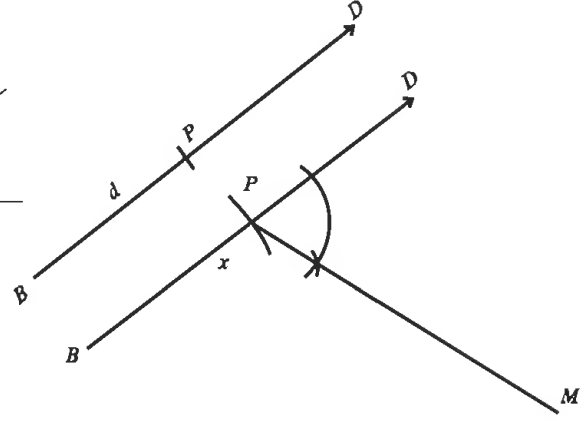
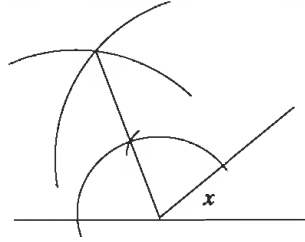
আবার $A'BC'$ ত্রিভুজে $\angle BA'C' = \angle x, BC' = a$ এবং $C'A' + A'B = DA' + A'B = DB = s$

$\triangle A'BC'$ -ই অপর উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৩

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

a _____
 d _____



মনে করি, ভূমি a । অপর দুই বাহুর অন্তর d এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BP = d$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২ : P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি।

ধাপ ৩ : B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৪ : B ও C যোগ করি।

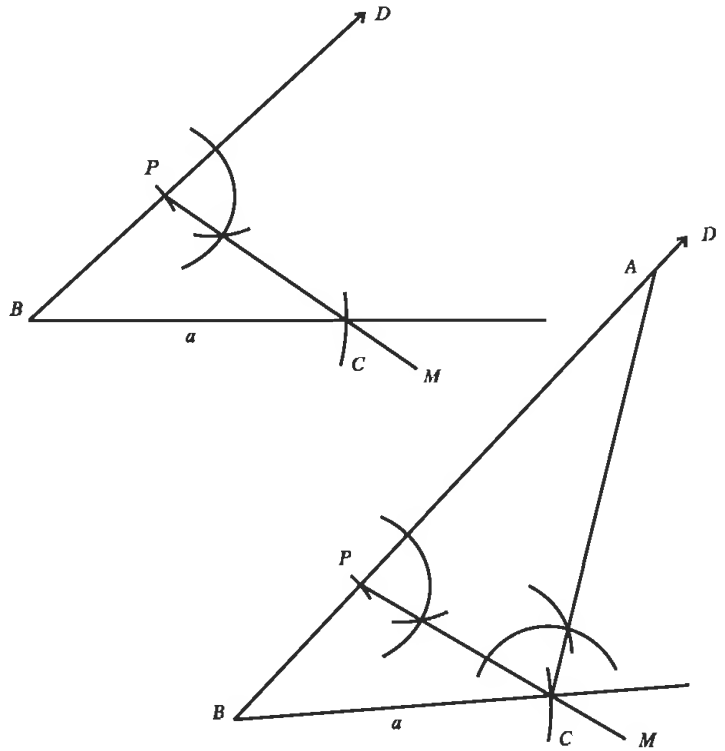
ধাপ ৫ : আবার, C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ :

$$\angle APC = \angle ACP \quad \therefore AP = AC$$

$$\therefore AB - AC = AB - AP = d$$

আবার $\angle APC = \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক।



$\therefore AD = d =$ ভূমির ওপর অঙ্কিত মধ্যমা, অর্থাৎ, BC ভূমি।

আবার, $\angle ABC = \angle x =$ ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ।

$\therefore ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : $\angle x$ এর ওপর নির্ভর করে অনেক ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে।

উদাহরণ ১। ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ 60° এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি ৭ সে.মি.। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : দেওয়া আছে ভূমি $BC = 5$ সে.মি. অপর দুই বাহুর সমষ্টি $AB + AC = 7$ সে.মি, এবং $\angle ABC = 60^\circ$ । $\triangle ABC$ অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BX থেকে $BC = 5$ সে.মি. কেটে নিই

ধাপ ২ : $\angle XBY = 60^\circ$ আঁকি

ধাপ ৩ : BY রশ্মি থেকে $BD = 7$ সে.মি. কেটে লই।

ধাপ ৪ : C, D যোগ করি

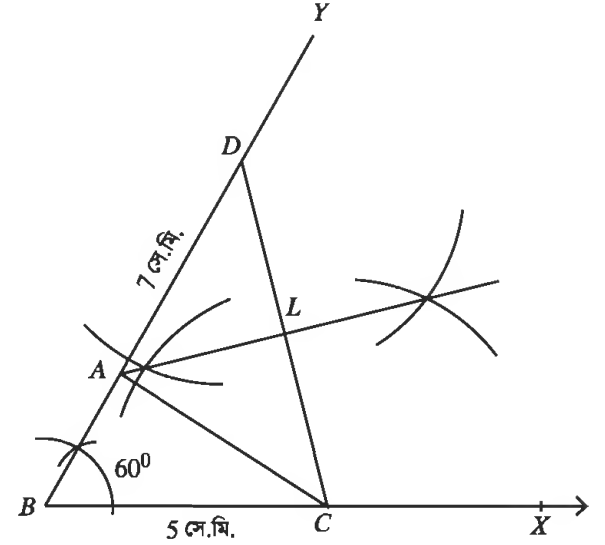
ধাপ ৫ : CD রেখার লম্বদ্বিখন্ডক আঁকি যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬ : A, C যোগ করি, তাহলে ABC -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

নোট : যেহেতু AL, CD এর লম্বদ্বিখন্ডক

$\therefore AD = AC$

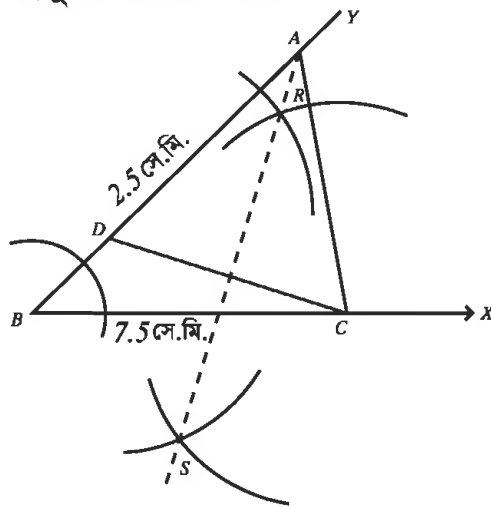
তাহলে $BD = BA + AD = BA + AC = 7$ সে.মি.।



চিত্র

উদাহরণ ২ : ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য ৭.৫ সে.মি. ভূমি সংলগ্ন কোণ 45° এবং অপর দুই বাহুর অন্তর ২.৫ সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : দেওয়া আছে ভূমি $BC = 7.5$ সে.মি., অপর দুই বাহুর অন্তর $AB - AC$ বা $AC - AB = 2.5$ সে.মি. এবং ভূমি সংলগ্ন কোণ 45° । ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



চিত্র

(i) $AB - AC = 2.5$ সে.মি এর ক্ষেত্রে অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

- ১। যেকোনো রশ্মি BX থেকে $BC = 7.5$ সে.মি কেটে নিই।
 - ২। $\angle YBC = 45^\circ$ অঙ্কন করি।
 - ৩। BY রশ্মি থেকে $BD = 2.5$ সে.মি কেটে নিই।
 - ৪। C, D যোগ করি।
 - ৫। CD এর ওপর RS লম্ব দ্বিখণ্ডক আঁকি যেন BY কে A বিন্দুতে ছেদ করে।
 - ৬। A, C যোগ করি
- তাহলে ABC -ই নির্ণয় ত্রিভুজ।
- (ii) $AC - AB = 2.5$ সে.মি. ধরে ত্রিভুজটি নিজে অঙ্কন কর।

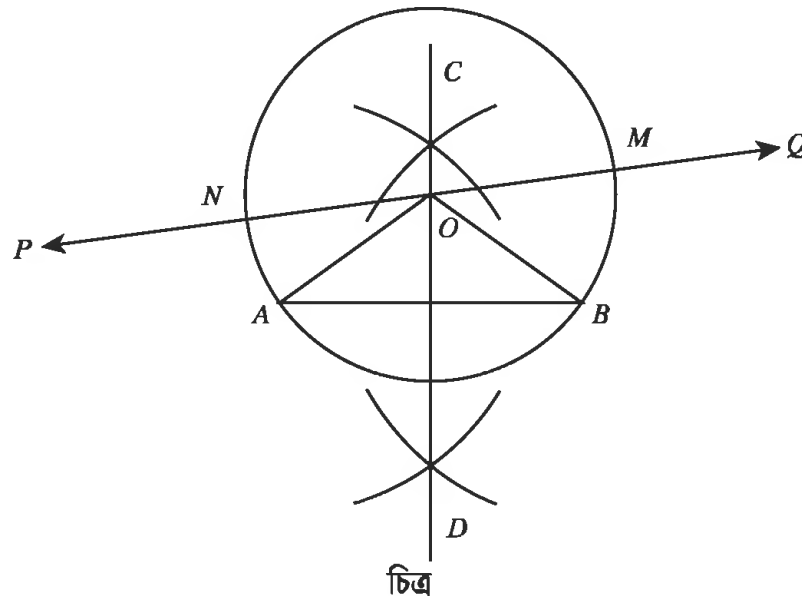
কাঙ্ক্ষ :

- ১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
- ২। ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি, $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB + CA = 8.2$ সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।
- ৩। সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, অপর বাহু এবং অতিভুজের ঠৈ 5.5 সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।
- ৪। $\triangle ABC$ এর $BC = 4.5$ সে.মি, $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে.মি দেওয়া আছে। $\triangle ABC$ টি অঙ্কন করতে হবে।
- ৫। $\triangle ABC$ এর পরিসীমা 12 সে.মি, $\angle B = 60^\circ$ এবং $\angle C = 45^\circ$ দেওয়া আছে। $\triangle ABC$ টি আঁকতে হবে।

৪.২ বৃত্ত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য ৫

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।



$\therefore ABC$ ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রতিটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৭

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C, P ঐ বৃত্তের ওপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : P, Q যোগ করি।

ধাপ ২ : PQ এর লম্বদ্বিখলক AB আঁকি

ধাপ ৩ : C, P যোগ করি

ধাপ ৪ : বর্ধিত CP রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে

ধাপ ৫ : ' O ' কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR -ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

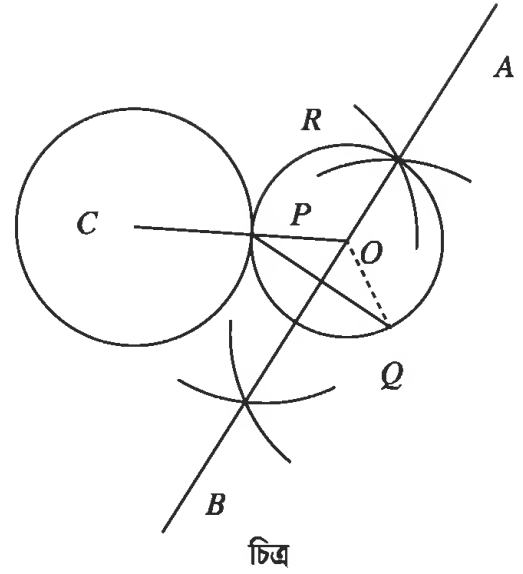
প্রমাণ : O, Q যোগ করি। AB রেখাংশ বা OB রেখাংশ PQ এর লম্বদ্বিখলক।

$\therefore OP = OQ$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা Q বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার P বিন্দুটি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার ওপর অবস্থিত এবং P বিন্দু উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ P বিন্দুতে বৃত্তদ্বয় মিলিত হয়েছে। সুতরাং বৃত্তদ্বয় P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

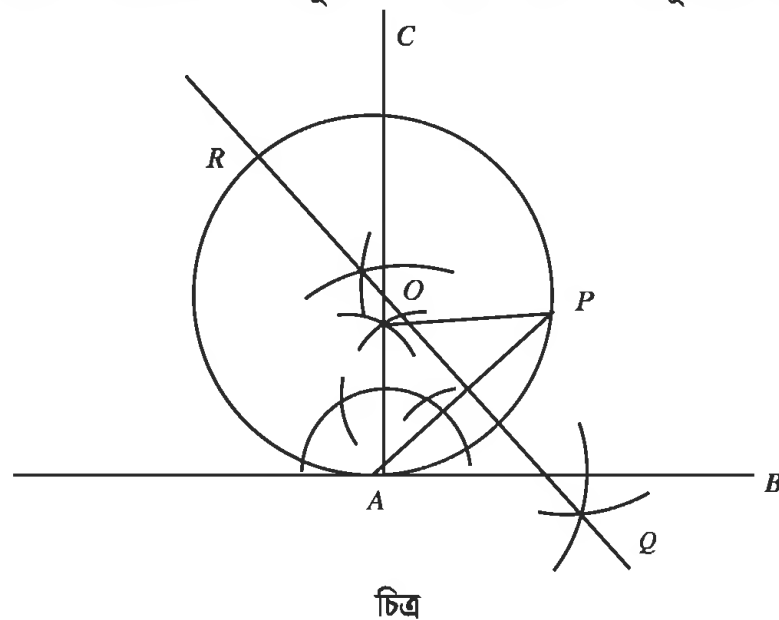
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।



সম্পাদ্য ৮

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং রেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু দিয়ে যায়।

মনে করি, AB সরল রেখা A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB রেখার বহিঃস্থ P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা AB কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং P বিন্দু দিয়ে যায়।



অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

ধাপ ১ : AB এর ওপর A বিন্দুতে AC লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ ২ : P, A যোগ করে তার লম্বদ্বিখন্ডক QO অঙ্কন করি।

ধাপ ৩ : QO এবং AC রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৪ : O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি QO রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে APR ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, P যোগ করি। AP রেখার লম্বদ্বিখন্ডক OQ এর ওপর O বিন্দুটি অবস্থিত।

$$\therefore OA = OP$$

$\therefore O$ কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত P বিন্দু দিয়ে যায়।

আবার OA ব্যাসার্ধ রেখার A প্রান্ত বিন্দুতে AB এর ওপর AO লম্ব।

$\therefore AB$ রেখাংশ বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে।

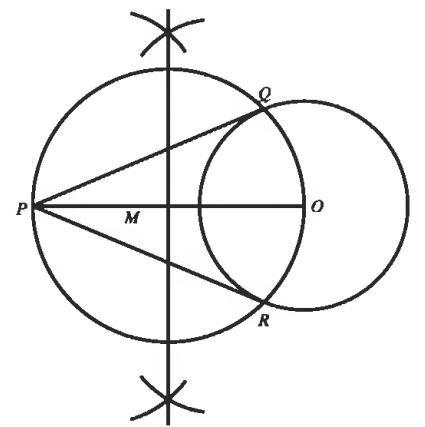
$\therefore O$ কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

বিশ্লেষণ : যেহেতু বৃত্তটি নির্দিষ্ট রেখাকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং ঐ রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে সমকোণে থাকবে। সুতরাং নির্দিষ্ট রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব আঁকতে হবে এবং এই লম্বই বৃত্তের একটি ব্যাস হবে। আবার ঐ রেখাঙ্ নির্দিষ্ট বিন্দু ও বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু উভয়েই বৃত্তের পরিধির ওপরে থাকবে বিধায় এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডক কেন্দ্র দিয়ে যাবে।

তাহলে এই লম্বদ্বিখন্ডক ও পূর্বাঙ্কিত ব্যাসের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

উদাহরণ ১। ২ সে.মি, ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ৫ সে.মি, দূরে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : ২ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং নির্দিষ্ট P থেকে O বিন্দুর দূরত্ব ৫ সে.মি। P বিন্দু থেকে উক্ত বৃত্তে স্পর্শক অঙ্কন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।



অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : OP রেখাকে দ্বিখন্ডিত করি। ধরি, দ্বিখন্ডিত বিন্দু M ।

ধাপ ২ : M -কে কেন্দ্র করে OM ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যা O কেন্দ্রিক বৃত্তের Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৩ : P, Q এবং P, R যোগ করি। তাহলে PQ এবং PR -ই নির্ণেয় স্পর্শক।

এখন, PQ ও PR কে পবিমাপ করে পাই, $PQ = PR = 4.6$ সে.মি.

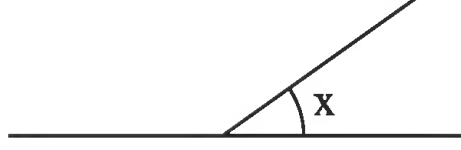
কাজ :

১। ৫ সে.মি., ১২ সে.মি. ও ১৩ সে.মি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অন্তবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২। ৬.৫ সে.মি., ৭ সে.মি. এবং ৭.৫ সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের বহিঃবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৪

১.



চিত্র

$x = 60^\circ$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

ক. 30° খ. 60° গ. 120° ঘ. 180°

২. i. যেকোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

ii. শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

iii. বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii

খ. ii ও iii

গ. i ও iii

ঘ. i, ii ও iii

৩। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৪। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১২। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৩। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা-এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে। যেন $CP^2 = AP \cdot PB$ হয়।

১৫. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ৫ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ৬ সে.মি.।

ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গ. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসাধ্যের সমান একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু Q দিয়ে যায়।